
Mécanique analytique, Série 12

Assistants et tuteurs :

jeanne.bourgeois@epfl.ch
luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch
nathan.brunet@epfl.ch

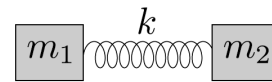
lorenzo.fioroni@epfl.ch
filippo.ferrari@epfl.ch
jonas.daverio@epfl.ch

leo.goutte@epfl.ch
mathias.findrihan@epfl.ch
remi.thomas@epfl.ch

Dans cette série d'exercices, vous allez appliquer les notions de petites oscillations et modes normaux vues au cours. Vous pouvez résoudre avec le formalisme Lagrangien car la démarche avec le formalisme Hamiltonien est très similaire.

Exercice 1 : Deux masses et un ressort

Deux particules de masse m_1 et m_2 sont reliées par un ressort de constante k et de longueur au repos L . Elles ne peuvent se déplacer que selon l'axe x .



- a) Choisir des coordonnées généralisées pour décrire le système et écrire le lagrangien.
- b) Trouver les quantités conservées du système. Montrer, en particulier, que l'impulsion totale

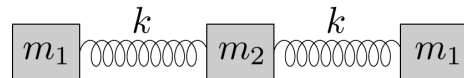
$$\sum_i p_i = \sum_i m_i \dot{x}_i$$

est conservée.

- c) Trouver les positions d'équilibre, en choisir une et décrire de petites oscillations autour d'elle.
- d) Trouver les modes d'oscillation ainsi que les coordonnées normales.
- e) Exprimer le lagrangien et les quantités conservées en fonction des coordonnées normales.
- f) Quel est le rayon de validité de ce résultat ?
- g) Quelle solution devrait-on trouver dans la limite $m_2 \gg m_1$; est-ce le cas ?

Exercice 2 : Trois masses et deux ressorts

Trois particules de masse m_1 , m_2 et m_1 sont reliées par deux ressorts de constante k et de longueur au repos L_1 et L_2 . Elles ne peuvent se déplacer que selon l'axe x . Procéder comme pour l'exercice 1.



Exercice 3 : Particule oscillante

Une particule de masse m se déplace dans un potentiel unidimensionnel donné par

$$V(x) = V_0 \tan^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right). \quad (1)$$

- a) Tracer le potentiel et le portrait de phase.
- b) Déterminer la fréquence des petites oscillations.
- c) Déterminer la forme de la solution générale $W_{\pm}(x; E)$ de l'équation caractéristique de Hamilton–Jacobi. Exprimer le résultat sous forme intégrale.
- d) Calculer la variable action I en fonction de E (voir indication). Noter que les points de rebroussement (bornes de l'intégrale) dépendent de E .
- e) En déduire E en fonction de I , puis la fréquence des oscillations.
- f) Dans quelle limite le résultat est-il compatible avec celui du point 2? Pourquoi?
- g) Déterminer la fréquence en fonction de E quand $E \gg V_0$. Interpréter le résultat.

Indication :

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+\alpha z^2} dz = \frac{\pi}{\alpha} (\sqrt{\alpha+1} - 1) \quad \text{pour } \alpha \geq -1. \quad (2)$$